



Tom 35/2022, ss. 29-39
ISSN 2719-4175
e-ISSN 2719-5368
DOI: 10.19251/ne/2022.35(2)
www.ne.mazowiecka.edu.pl

Marta Lipnicka

e-mail: marta.lipnicka@wmii.uni.lodz.pl

Uniwersytet Łódzki

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-3768-5691>

Artur Lipnicki

e-mail: artur.lipnicki@wmii.uni.lodz.pl

Uniwersytet Łódzki

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-9848-6157>

ANALIZA PROGNOZ W EKONOMII W ODNIESIENIU DO GEOMETRII KRATY WIELOMIANÓW CAŁKOWITYCH

ANALYSIS OF ECONOMIC FORECASTS WITH REFERENCE TO THE GEOMETRY OF THE LATTICE POLYNOMIALS WITH INTEGER COEFFICIENTS

Streszczenie

Głównym celem pracy jest wskazanie metody otrzymywania pewnych wartości norm dla funkcji bazowych generujących prognozy zjawisk cyklicznych w ekonomii. Dokładniej, poszukujemy asymptotyki błędu prognozy i norm funkcji bazowych wynikającej z zastosowania metody opartej na wielomianach

Summary

The main aim of our work is to indicate the method of obtaining certain values of norms for base functions that generate forecasts of cyclical phenomena in economy. More precisely, we are looking for the asymptotic of the forecast error and norms for the base functions that are generated by the application

całkowitych. Rozważamy problem kolejnych minimów kratowych dla wielomianów aproksymujących wybrane zjawiska ekonomiczne. Poszukujemy optymalnej bazy pod względem normy oraz badamy geometrię wybranej przestrzeni funkcji. Dane (najczęściej zdarzeń cyklicznych) możemy aproksymować wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Wybrany w ten sposób wielomian (przy pewnych założeniach dotyczących warunków brzegowych) możemy aproksymować wielomianem o współczynnikach całkowitych. Proces ten zdecydowanie przyspiesza dalszą analizę zjawiska. Zbiór takich wielomianów tworzy strukturę geometryczną zwaną kratą. Możemy zatem pytać o wybór najlepszej bazy w danej kratce oraz elementów kraty o możliwie najmniejszej normie. Otrzymana baza będzie składać się wówczas tylko z wektorów o najmniejszej możliwej normie. Otrzymujemy wówczas pewne wartości błędów dla podanej aproksymacji, których asymptotyka podana jest w pracy.

Słowa kluczowe: prognozowanie, kraty wielomianów, aproksymacja

JEL Classification: C02, C61, O22

WPROWADZENIE

Często spotykanym problemem w ekonomii jest analiza dotycząca właściwej metody w podejściu do prognozowania zjawisk. Na uwagę zasługują tutaj szczególne typy zjawisk, dokładniej zjawiska cykliczne. Cykliczność ma oczywiście wiele zalet. Znane są nam narzędzia matematyczne wyrażające prognozy z uwzględnieniem pewnych błędów. W przypadku takich procesów sprawdzi się doskonale analiza harmoniczna, teoria dotycząca szeregów Fouriera. Analiza harmoniczna jest bardzo dynamicznie rozwijającą się gałęzią matematyki. Początki badań sięgają wyników Josepha Fouriera z początku XIX wieku w pracach dotyczących równania przewodnictwa cieplnego. Jego do-

of the method based on integer polynomials. We consider the problem of successive lattice minima for polynomials approximating certain economic phenomena. We are looking for the optimal base with some norm and we study the geometry of some space of functions. Data (most often cyclic events) can be approximated by a polynomial with real coefficients. The selected polynomial (with some assumptions about the boundary conditions) can be approximated by a polynomial with integer coefficients. This process significantly accelerates further analyzes and simulations of phenomena. The set of such polynomials creates a geometric structure called a lattice. Therefore, we can ask how to find the best base in a given lattice and how to find elements of lattice with the smallest possible norm. So, the obtained base that contains only vectors with the smallest possible norm. In this way, we obtain some error values for the given approximation, the asymptotic of which is given in this paper.

Keywords: forecasting, lattice polynomials, approximation

konania odbiły się szerokim echem w świecie matematyki i dziedzin pokrewnych. Głównym celem metody szeregów czasowych jest niewątpliwie zbudowanie modelu pewnego procesu w oparciu o obserwowane zmiany w czasie pewnych mierzalnych wielkości opisujących ten proces. Oczywiście ogólnie przyjęte założenia wymagają, aby obserwowany proces składał się z części systematycznej i części okresowej. Są to bez wątpienia czynniki determinujące nasze zjawisko. Przyjmować będziemy, że jednostki czasu użyte do badania będą równe.

W przypadku, gdy mamy do dyspozycji dane w modelu dyskretnym na zadanej skali czasowej możemy skorzystać najpierw z określenia wielomianu aproksymującego dane wielkości lub wielomianu odpowiednio wysokiego stopnia zawierającego wszystkie podane punkty w swoim wykresie. W takim przypadku otrzymujemy wielomian o współczynnikach rzeczywistych. W dalszej analizie możemy przyjąć, że ten wielomian na krańcach naszej skali czasowej przyjmuje równe (całkowitoliczbowe) wartości. Jest to dość prosty zabieg – składamy nasz wielomian z odpowiednią funkcją liniową. Możemy tutaj założyć, że wartości całkowite na krańcach skali czasowej są możliwie blisko wartości rzeczywistych danych (mogą być ich przybliżeniem). Przestrzeń wielomianów powstała w ten sposób tworzy tzw. kratę (dokładna definicja w dalszej części pracy). W przestrzeni tej możemy wybrać oczywiście bazę złożoną z wielomianów całkowitych spełniających warunki dotyczące wartości całkowitoliczbowych na krańcach naszej dziedziny (określonej skali czasowej). Wśród elementów wybranej bazy mogą znaleźć się wielomiany o możliwie najkrótszej normie (norma L_2 lub norma L_∞).

Wiadomo, że każdą funkcję ciągłą na odcinku $[0,1]$, przyjmującą na końcach przedziału wartości całkowite, można jednostajnie aproksymować wielomianami o współczynnikach całkowitych. Prowadzi to w oczywisty sposób do następującego pytania: jak dobrze można aproksymować jednostajnie wielomian stopnia n na odcinku $[0,1]$, przyjmujący na końcach odcinka wartości całkowite, wielomianami o współczynnikach całkowitych? A co w takim przypadku z normą euklidesową? Oczywiście, bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że wartości całkowito-liczbowe osiągnane przez nasze funkcje na krańcach przedziału to wartości zerowe (odpowiednie złożenie z funkcją liniową).

W pracy rozważać będziemy również kilka innych metod wyznaczania prognozy (regresja, liniowa, wielomian Lagrange'a, szereg Fouriera). W przypadku tych metod również możemy pytać o błędy. Ciekawy jest natomiast

rzęd wielkości błędu i jego charakter dla wielomianów całkowitych. Badania naszego problemu bez zmniejszenia ogólności ograniczymy do odcinka $[0,1]$. Zbadamy, jakiego rzędu oszacowania mogą wystąpić w przypadku działań na kracie wielomianów całkowitych? W jaki sposób możemy wyrażać daną asymptotykę błędów? Uzyskane wyniki będą przedstawiać również szacowania samego błędu prognozy (promień pokrywający) oraz ograniczenia z góry dotyczące ostatniego minimum kraty (wektor z optymalnej bazy o możliwie największej normie).

1. ANALIZA DANYCH W MODELU DYSKRETNYM

Nasze rozważania rozpoczniemy od przeglądu kilku podstawowych metod wyznaczania prognozy (bez zagłębiania się w tym przypadku w błędy aproksymacji). Analiza harmoniczna jest metodą badania zjawiska okresowości w zadanym czasie. Budujemy tutaj model będący sumą harmonik (Podobny problem rozważany jest w pracy [Lipnicki i Lipnicka 2018]). Bazuje on na ogólnej postaci szeregu Fouriera w modelu ciągłym. W tej sytuacji każdej funkcji okresowej spełniającej warunki Dirichleta możemy przyporządkować szereg Fouriera w następującej postaci:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{T}x\right).$$

Współczynniki szeregu Fouriera [Tołstow 1954, Stein 1993, Grafakos 2014 i Torchinsky 1986] określamy wzorami

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2k\pi}{T}x\right) dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

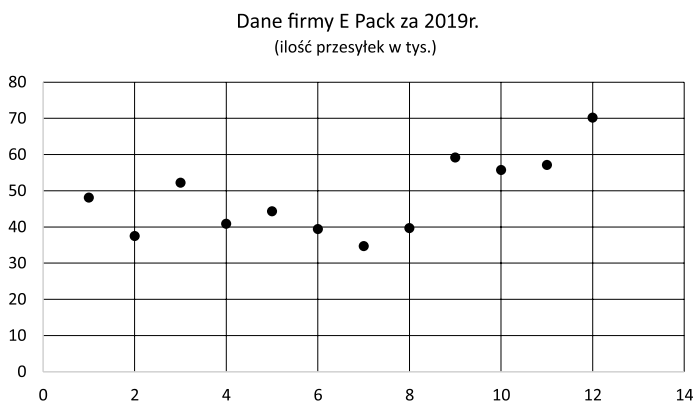
W naszym przypadku badane zjawisko y_t można opisywać za pomocą sumy harmonik o danym okresie. Zatem wykorzystywać w istocie będziemy tylko sumy częściowe szeregu Fouriera (liczba n będzie ustalona na początku omawianego problemu ekonomicznego i stanowić będzie najczęściej o skali czasowej). Metoda daje nam dość dobre wyniki prognozowania danego zjawiska. Znalezienie wartości kolejnych współczynników rozwinięcia nie jest zbyt trudne i przy pewnych dodatkowych założeniach daje dość dobre rezultaty. W pracy będziemy natomiast rozważać problem aproksymacji za pomocą wielomianu.

Rozważmy teraz przykład pewnej firmy kurierskiej E-Pack w roku 2019. Wielkość przewozów firmy wyrażona będzie w tysiącach paczek (od stycznia do grudnia). Na podstawie otrzymanych przez nas informacji zawartych w tabeli postaramy się zbudować odpowiedni model dotyczący aproksymacji i prognozy. Uwzględnimy tutaj również wybór pewnego wielomianu, odpowiednio wysokiego stopnia oraz poddamy analizie jego normę. Zbadajmy najpierw jak może wyglądać model prognozy wyrażony wielomianem otrzymanym z interpolacji Lagrange'a. W dalszej części podamy oszacowania dotyczące normy wielomianu bazowego z wybranej kraty (przy pewnych założeniach o danym wielomianie). Dane z firmy E-Pack przedstawia Tabela 1 oraz Rysunek 1.

Tabela 1. Dane uzyskane z firmy E-Pack

Miesiąc	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ilość	48,1	37,5	52,2	40,9	44,3	39,4	34,7	39,7	59,2	55,7	57,1	70,2

Źródło: Opracowanie własne.

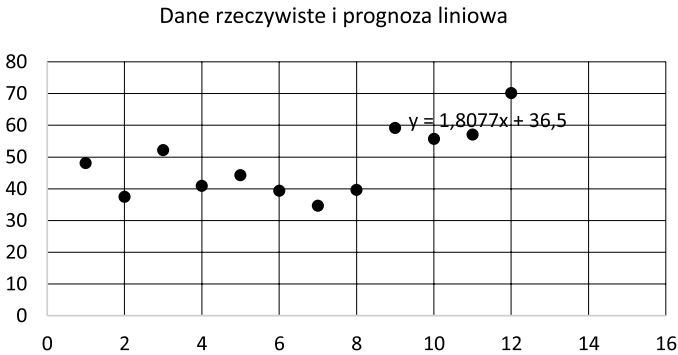


Rysunek 1. Interpretacja graficzna danych w roku 2019 t

Źródło: Opracowanie własne.

Już sama ocena wzrokowa wskazuje na to, że w szeregu występują wahania sezonowe (najczęściej związane ze wzmożonym okresem handlowym w tym czasie). W tej sytuacji (modelu dyskretnego) można analizować model sum częściowych Fouriera. Pamiętajmy tutaj, że w przypadku gdy rzeczywiste dane byłyby wyrażone przez funkcję ciągłą na przedziale czasowym $[t_0, t_1]$, to wówczas wzory na współczynniki Fouriera mogłyby być wyrażone całką. Wtedy możemy analizować również rząd zbieżności do zera współczynników Fouriera.

Rozważmy teraz model regresji liniowej [Radzikowska 2001] dla danego zjawiska. W tym przypadku dość łatwo otrzymujemy konkretne współczynniki i konkretną funkcję liniową o równaniu: $y = 1,8077x + 36,5$. Na poniższym wykresie przedstawiamy zależność danych obserwacji wraz z prognozą liniową.



Rysunek 2. Trend liniowy dla danych rzeczywistych

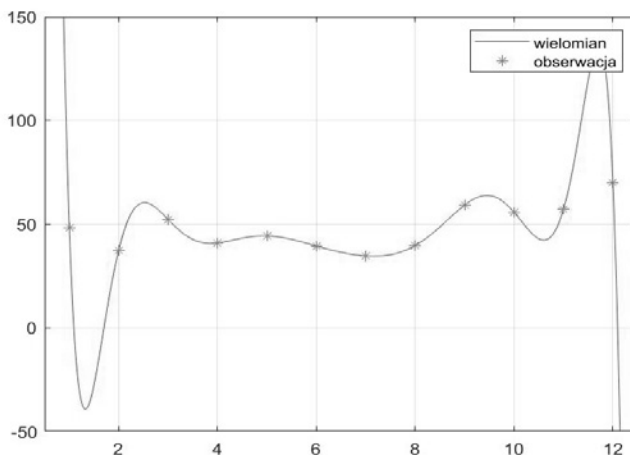
Źródło: Opracowanie własne.

Oczywiście, nie zachowujemy tutaj wartości w danych punktach jak w przypadku dopasowania przez wielomian uzyskany metodą interpolacji Lagrange'a (w dalszej części pracy). Rozważając taką funkcję (dopasowanie liniowe) na przedziałach skali czasowej otrzymujemy już pewną prognozę. Mając tutaj funkcję liniową na przedziałach możemy pytać o rozwinięcie jej w szereg Fouriera. Współczynniki rozwinięcia Fouriera będą zbieżne do zera, gdy indeks górny n sumy częściowej Fouriera będzie kolejno zwiększany. Wiadomo, że dla wszystkich funkcji ciągłych na pełnej skali czasowej szeregu, współczynniki rozwinięcia mieć wartość rzędu $1/n^\alpha$, przy pewnym $\alpha > 1$. Wynika to oczywiście z kryterium jednostajnej zbieżności szeregu Fouriera. W przypadku cyklicznych nieciągłości procesu otrzymamy tylko pewne średnie arytmetyczne wartości krańcowych (lewo i prawo-stronnej). Nie dostaniemy w tym przypadku jednostajnej zbieżności sum szeregu. Właśnie w ten sposób będzie zachowywał się nasz model regresji liniowej z uwagi na fakt nieciągłości na krańcach przedziału. Dokładniej, zauważyć tutaj można cykliczność wartości dla funkcji liniowej na kolejnych przedziałach czasowych.

Rozważmy teraz model prognozy zjawiska oparty na wykorzystaniu wielomianu odpowiednio dużego stopnia. Poszukując wielomianu możliwie dopasowanego do naszych węzłów (tak możemy nazywać zadane z góry, znane nam, wartości zjawiska) zastosujemy interpolację Lagrange'a. Otrzymany

wielomian (odpowiednio dużego stopnia) może przyjmować dość duże wartości w normie supremum. Interpolacja daje nam w tym przypadku następujące wartości współczynników (dla podanych węzłów): $-5.9301e-05$, 0.0042 , -0.1340 , 2.4691 , -29.3803 , 236.2144 , $-1.3032e+03$, $4.9036e+03$, $-1.2229e+04$, $1.9035e+04$, $-1.6382e+04$, $5.8144e+03$. Tym samym wielomian jest następującej postaci:

$$W(x) = (-5.9301e - 05)x^{11} + 0.0042x^{10} - 0.1340x^9 + 4.4691x^8 - 29.3803x^7 + 236.2144x^6 + (-1.3032e + 03)x^5 + (4.9036e + 03)x^4 + (-1.2229e + 04)x^3 + (1.9035e + 04)x^2 + (-1.6382e + 04)x + (5.8144e + 03)$$



Rysunek 3. Wykres wielomianu Lagrange'a dla 12 węzłów

Źródło: Opracowanie własne.

Otrzymany wielomian (o współczynnikach rzeczywistych) w dalszej części pracy może zostać wykorzystany jako prognoza z wykorzystaniem wielomianów całkowitych.

2. KRATA WIELOMIANÓW CAŁKOWITYCH I PROBLEM WYBORU ELEMENTÓW „NAJKRÓTSZYCH”.

W tej części pracy przedstawimy problem oszacowania normy wielomianu całkowitego prognozującego nasze zjawisko cykliczne. Dokładniej, omówimy sposób oszacowania tzw. ostatniego minimum kratowego przy pewnych założeniach o samej funkcji. Tematyka ta jest związana z klasycznym, ale nadal badanym zagadnieniem aproksymacji funkcji wielomianami całkowitymi.

Ważność problemu wynika m.in. ze związków z takimi działami teorii liczb jak aproksymacje diofantyczne. Możemy oczywiście założyć, że wszystkie nasze funkcje rozważamy na odcinku $[0,1]$. Jest to w oczywisty sposób konsekwencją ewentualnego złożenia naszego wielomianu z pewną funkcją liniową. Wprowadźmy w tym miejscu kilka oznaczeń. Dla każdego n naturalnego oznaczymy przez P_n przestrzeń wielomianów stopnia co najwyżej n . Niech P_n^z będzie podgrupą addytywną przestrzeni P_n złożoną z wielomianów o współczynnikach całkowitych. Podgrupę taką nazywamy *kratą*. Dla każdego $r = 0, 1, 2, \dots$ niech M_r będzie przestrzenią wszystkich wielomianów podzielnych przez wielomian $x^r(1-x)^r$. Tak więc, M_0 jest przestrzenią wszystkich wielomianów, M_1 zaś jest jej podprzestrzenią złożoną z wielomianów zerujących się na końcach odcinka $[0, 1]$. Gdy $n \leq 2r - 1$, wtedy $P_n \cap M_r = \{0\}$, dlatego w dalszym ciągu będziemy zakładać, że $n \geq 2r$. Oznaczmy teraz przez $\mu_{n,r}$ najmniejszą liczbę taką, że dla każdego wielomianu $P \in P_n^z \cap M_r$ istnieje wielomian taki, że

$$\max_{x \in [0,1]} |P(x) - Q(x)| \leq \mu_{n,r}.$$

A zatem otrzymujemy następującą równość:

$$\mu_{n,r} := \max_{P \in P_n^z \cap M_r} \min_{Q \in P_n^z \cap M_r} \left(\max_{x \in [0,1]} |P(x) - Q(x)| \right).$$

Liczbę $\mu_{n,r}$ nazywać będziemy *promieniem pokrywającym* $P_n^z \cap M_r$. Zakładając zatem, że nasze zjawisko w przedziale czasowym $[t_1, t_2]$ przyjmuje identyczne wartości całkowito-liczbowe (np.: ilość przesyłek na początek i koniec roku kalendarzowego) możemy z pewną dokładnością pytać o prognozy na następne lata wyrażone jako całkowite funkcje wielomianowe. Wartości całkowite współczynników prognozy są niezwykle ważne w algorytmach, przyspieszając tym samym pewne działania arytmetyczne w tym przypadku. Bez zmniejszenia ogólności przyjmujemy, że wartości te są równe zero (wynika to z możliwości złożenia danej funkcji z pewną funkcją liniową). W takim przypadku W.Banaszczyk i A.Lipnicki udowodnili w pracy pt. *On the lattice of polynomials with integer coefficients: the covering radius in $L_p(0,1)$* ([Banaszczyk i Lipnicki 2015]), że dla ustalonego $r = 1, 2, \dots$ oraz $n \geq 6r$ zachodzą następujące nierówności:

$$c_1 \cdot c_2^r \cdot r^{2r + \frac{1}{2}} \cdot n^{-2r} < \mu_{n,r} < c_3 \cdot c_4^r \cdot r^{2r + \frac{1}{2}} \cdot n^{-2r},$$

gdzie $c_i, i = 1, 2, 3, 4$ są stałymi liczbowymi. Można wówczas przyjąć, że

$$c_1 = \sqrt{\pi}, c_2 = e^{-2}, c_3 = 2\sqrt{\pi} + 1, c_4 = 16.$$

Widać zatem, że wielkość wspomnianego promienia pokrywającego jest rzędu n^{-2r} przy $n \rightarrow \infty$. Zakładając tutaj, że w naszym przypadku mieliśmy do czynienia z wielomianami stopnia $n=12$ (zakładając, że klasa naszego r jest rzędu 1), uzyskujemy wartość promienia pokrywającego dla naszej struktury rzędu $(1/12)^2$ (możemy przyjąć średni błąd dla naszego zjawiska). Dostajemy zatem, że asymptotyka błędu prognozy dla zjawiska cyklicznego dla klasy funkcji r wynosi n^{-2r}

Załóżmy teraz, że mamy dany wielomian o współczynnikach rzeczywistych, stopnia n na przedziale $[0,1]$ wyrażający prognozę przedstawionego przedsiębiorstwa. Oczywiście jako przykład możemy rozważać wielomian otrzymany metodą interpolacji Lagrange'a w poprzedniej sekcji. Jak wspomnieliśmy, możemy przyjąć, że $P \in P_n \cap M_r$ dla pewnego r . Zdefiniujmy następującą wielkość:

$$\gamma_i(P_n^Z \cap M_r) = \min\{s > 0: \dimspan(P_n^Z \cap M_r \cap sB_{P_n \cap M_r}) \geq i\}$$

gdzie $B_{P_n \cap M_r}$ oznacza kulę jednostkową w przestrzeni $P_n \cap M_r$. Wielkości te nazywane są *kolejnymi minimami kratowymi*. Geometrycznie oznacza to, że $\gamma_i(P_n^Z \cap M_r)$ stanowi długość najkrótszego niezerowego elementu kraty $P_n^Z \cap M_r$. Mając oczywiście wartość ostatniego minimum kratowego dostajemy tym samym oszacowania wszystkich elementów bazowych danej kraty. Możemy zatem w pewien sposób oszacować normę wielomianu całkowitego generowanego przez wektory wspomnianej bazy.

Rozważmy tutaj prosty przykład dla przestrzeni funkcji ciągłych na odcinku $[0,1]$, gdzie za standardową bazę możemy przyjąć wielomiany $v(x)=1$, $w(x)=x$. Jest to baza dla kraty P_1^z . W tej sytuacji łatwo sprawdzimy, że dla normy euklidesowej dostajemy następujące wielkości:

$$\gamma_1(P_1^Z) = \gamma_2(P_1^Z) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Znalezienie wartości pewnych minimów kratowych (więcej informacji w [Lipnicki 2016]) będzie wiązało się z definicją wielomianów Legendre'a oraz rozważeniem sytuacji parzystości i nieparzystości wartości n . Przyjmijmy zatem, że rozważamy problem dla liczb parzystych (w przypadku nieparzystości analiza jest podobna). Wprowadźmy następujące oznaczenie (dla pewnych ustalonych wartości a, b):

$$H(a, b, n, r) = \{P \in P_n \cap M_r: P^{(r)}(0) = a, P^{(r)}(1) = b\}$$

oraz niech $R(a, b; n, r)$ oznacza najkrótszy element przestrzeni $H(a, b, n, r)$ oraz przez E oznaczymy zbiór wielomianów spełniających warunek $P(x) = P(1 - x)$. Na podstawie wyników badań struktur krat w pracach [Banaszczyk i Lipnicki 2015] i [Lipnicki 2016] otrzymujemy, że w naszej sytuacji możemy wyznaczyć wielomian realizujący ostatnie minimum kraty, dokładniej $R(1, 1; n, 0)$ będzie stanowił ostatnie minimum kraty $P_n^z \cap E$. Jego wartość w normie euklidesowej będzie rzędu Korzystając z wyników prac [Banaszczyk i Lipnicki 2015] i [Lipnicki 2016] możemy również otrzymać dokładną postać takiego wielomianu

$$R(1, 1; n, 0) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{i=0}^{n/2} (4i+1) P_{2i},$$

gdzie P_{2i} to wielomiany Legendre'a na przedziale $[0, 1]$. Teraz widzimy, że właściwie każdy z następných elementów bazy musi mieć normę mniejszą niż $R(1, 1; n, 0)$. Dostajemy stąd pewne oszacowanie w normie euklidesowej dotyczące wektorów bazowych naszej kraty.

PODSUMOWANIE

Mając pewne dane w ekonomii możemy różnymi metodami wyznaczać prognozy dotyczące tego zjawiska ([Beenstock 2007, Gajda 2007, Maddala 2006 i Zellner 1962]). Ciekawe przykłady, które można poddać analizie błędu prognozy wraz z średniookresowym tempem zmian możemy odnaleźć w pracy [Kaczmarczyk i Szewczyk-Jarocka 2017]. Klasyczne sposoby mogą dotyczyć regresji liniowej, metody najmniejszych kwadratów czy interpolacji Lagrange'a. Możemy również analizować sumy szeregu Fouriera i w tym celu wykorzystywać narzędzia analizy harmonicznej. W zależności od typu danych, ich rozkładu, rodzaju modelu, decydujemy o wyborze metody konstrukcji prognozy. W przypadku danych skupionych na krańcach przedziału możemy oczekiwać wielomianów dość wysokiego stopnia w przypadku klasycznej aproksymacji wielomianowej. Wówczas metoda ta na krańcach skali czasowej daje nam duży błąd (w sensie normy jednostajnej). Aproksymacja wielomianem, następnie konstrukcja wielomianu o współczynnikach całkowitych, wybór bazy dla tego wielomianu i szacowanie promienia pokrywającego (błędów) oraz kolejnych minimów kratowych nie jest procesem łatwym ani szybkim. Wyniki zawarte w pracy dają nam pewne oszacowania i asymptotykę problemu błędów w prognozie oraz asymptotykę norm pewnych wektorów z bazy. Prognozy wyrażone wielomianami całkowitymi zdecydowanie upraszczają nam wiele operacji

na naszych danych. Jednocześnie sama struktura przestrzeni tych funkcji jest dość skomplikowana geometrycznie. Wiemy, jak wyglądają wielomiany o dość małej normie w tej przestrzeni (ostatnie minima kratowe), jesteśmy w stanie oszacować normę ostatniego z wektorów tej bazy (ostatnie minimum, najdłuższy wektor bazowy).

Literatura

- Banaszczyk, W., Lipnicki, A. (2015). *On the lattice of polynomials with integer coefficients: the covering radius in $L_p(0,1)$* . *Annales Polonici Mathematici* 115.2.
- Beenstock, M., Felsenstein, D. (2007). *Spatial Vector Autoregressions*. *Spatial Economic Analysis* 2 (2), s. 167-196.
- Czerwiński, Z., Guzik, B., (2008). *Prognozowanie ekonometryczne*. PWE, Warszawa, 2008.
- Gajda, J. B., (2007). *Ekonometria*. C.H. Beck, Warszawa.
- Grafakos, L. (2014). *Classical: Classical Fourier Analysis*. *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 249
- Kaczmarczyk, P., Szewczyk- Jarocka, M. (2017). *Analiza kosztów działalności w polskim sektorze ICT w latach 2008-2015*. *Zeszyty Naukowe PWSZ w Płocku*. Nauki Ekonomiczne Tom 26/2017. doi: 10.19251/ne/2017.26(16)
- Lipnicki, A. (2016). Uniform approximation by polynomials with integer coefficients. *Opuscula Math.* 36, no. 4, 489-498.
- Lipnicki, A., Lipnicka, M. (2018). *Metody aproksymacji i prognozowania zjawisk cyklicznych*, *Zeszyty Naukowe PWSZ w Płocku*. Nauki Ekonomiczne. Tom XXVII, doi: 10.19251/ne/2018.27(3)
- Maddala, G.S., (2006). *Ekonometria*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Radzikowska, B. (2001). *Metody prognozowania. Zbiór zadań*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oscara Langego we Wrocławiu, Wrocław.
- Stein, E. M. (1993). *Harmonic Analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*. : Princeton University Press. Princeton.
- Tołstow, G. (1954). *Szeregi Fouriera*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Torchinsky, A. (1986). *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis*. Academic Press, New York.
- Zellner, A. (1962). An efficient method of estimating seemingly unrelated regressions and tests for aggregation bias. *Journal of the American Statistical Association* 57 (298).